Die Vermessung der Welt

Maria Kober

19. November 2014
Seminar: Mathematik in Filmen und Serien
an der Universität Passau

Inhaltsverzeichnis

1 Alexander von Humboldt

1.1 Bezug zum Film

In diesem Abschnitt finden sich Begebenheiten über Alexander von Humboldt, die ich in dem Film „Die Vermessung der Welt“ gefunden habe.

Alexander von Humboldt wurde in der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts in Deutschland geboren. Seine Familie ist wohlhabend und mit dem Herzog von Braunschweig in engem Kontakt. Er besucht die Bergbauakademie in Freiberg, entwickelt eine Grubenlampe und erforscht die Pflanzen dort. Schon als Jugendlicher interessiert er sich sehr für Pflanzen, und er will über den Ozean fahren. Nach dem Tod seiner Mutter investiert er sein gesamtes Erbe in eine Reise nach Amerika, die er zusammen mit dem Franzosen Aimé Bonpland unternimmt.

Bei der Erforschung des neuen Kontinents ist für Alexander von Humboldt alles wichtig. Gefundene Pflanzen werden gesammelt und katalogisiert, ebenso die Tiere. Er besucht verschiedene Ureinwohner Amerikas, untersucht diese und führt Vermessungen im Urwald durch. Während seiner Reise findet er die Verbindung zwischen dem Orinoco und dem Amazonas, welche zuvor nicht belegt war.

Alexander von Humboldt experimentiert mit der Elektrizität (angeregt durch einen elektrischen Aal), schreibt über „Physische Geographie“ und sucht den magnetischen Äquator. Zusammen mit Aimé Bonpland besteigt er den Chimborazo, der als höchster Berg der Welt gilt. Obwohl sie den Gipfel nicht besteigen, sind sie so hoch über dem Meeresspiegel wie noch niemand vor ihnen.

Im höheren Alter befindet sich Alexander von Humboldt wieder in Deutschland. 1828 folgt Carl Friedrich Gauß seiner Einladung zum deutschen Naturforschercongress, wo sich die beiden näher kennen lernen. Alexander von Humboldt bereist noch Sibirien, Russland und die Steppen Asiens. Er erforscht den Erdmagnetismus und vermisst das Magnetfeld.

1.2 Biographischer Hintergrund

Alexander von Humboldt wurde am 14. September 1769 in Berlin geboren.[1] Er wächst auf Schloss Tegel bei Berlin auf, in einer wohlhabenden Familie, welche Kontakte zum preußischen Königshaus hat. Schon früh zeigt sich ein ausgeprägtes Interesse an Pflanzen und ein Talent fürs Zeichnen.[2] Er erhält Privatunterricht und entwickelt in seiner Jugendzeit großes Interesse an fernen Ländern.[3] 1790 geht er auf eine naturwissenschaftliche Reise durch verschiedene Länder Europas.[4]

Auf Wunsch seiner Mutter strebt Alexander von Humboldt eine Anstellung als Beamter an. Dazu studiert er staatliche Verwaltung, was er schon nach einem Jahr abbricht. Nach Berlin zurückgekehrt nimmt er Privatunterricht in Physik, Mathematik, Zeichnen, Botanik, Griechisch und Philosophie.[5] Auf Drängen seiner Mutter studiert Humboldt Berg-

[1] [PL12, 136]
[2] [Dem11, 9]
[3] [PL12, 136]
[4] [Dem11, 11]
[5] [PL12, 136]

bau in Freiberg, wird 1992 Mitglied der preußischen Bergverwaltung und mit 23 Jahren Oberbergmeister.[6] Daneben veröffentlicht er eine Abhandlung über Höhlenpflanzen und richtet eine Abendschule für die Bergbauleute ein, an der er unterrichtet und Lehrbücher schreibt.[7]

Nach dem Tod seiner Mutter 1796 gibt Alexander von Humboldt, finanziell durch das Erbe abgesichert, seine Stellung als Beamter auf.[8] Er bereitet sich ausführlich auf eine größere Reise vor; u.a. beschafft er Messinstrumente, erlernt geophysikalische Messung und astronomische Beobachtung. 1798 geht er nach Paris, um von dort aus die Welt zu erkunden, was aus politischen Gründen scheitert.[9]

Daraufhin geht er nach Spanien, und bekommt vom spanischen Königshaus einen Freibrief. Damit kann er in alle spanischen Kolonien reisen und dort forschen.[10] Mit einem Drittel seines Erbes finanziert er seine Reise nach Lateinamerika, welche er zusammen mit Aimé Bonpland unternimmt.[11] 1799 beginnt die Reise per Schiff. Humboldts Expedition ist die erste rein wissenschaftliche Reise in die Neue Welt.[12]

1.3 Die Reise nach Amerika

Im Juli des Jahres 1799 kommen Alexander von Humboldt und Aimé Bonpland in Cumana, Venezuela, an.[13] Im Frühjahr 1800 brechen sie zu ihrer ersten Exkursion ins Landesinnere auf.[14] Dazu folgen sie dem Fluss Orinoco flussaufwärts, auf der Suche nach der Verbindung zum Flussystem des Amazonas. Diese wird im Verlauf der Expedition auch gefunden.[15]

Alexander von Humboldt untersucht die Indianerstämme, welche am Flussufer leben.[16] Er studiert ihre Sprache, ihren Körperbau und ihre Gebräuche. Er sammelt und studiert Pflanzen und fängt Tiere; vor allem für Affen interessiert er sich. Alexander von Humboldt vermisst und kartografiert jede Flussbiegung und die Flussumgebung.[17]

Von 1801-1802 machen Humboldt und Bonpland eine Expedition in die Anden.[18] Dort erforscht er Vulkane und den Vulkanismus.[19] Er bestieg den Chimborazo, der damals als der höchste Berg der Welt gilt, und steigt somit höher als je ein Mensch vor ihm.[20] Während des Aufstiegs beobachtet er die Vegetation (siehe Abbildung 1) und misst Klimadaten wie Luftdruck und Luftfeuchtigkeit.[21] Hieraus entwickelt er die sogenannte „Pflanzengeographie“:[22] Der Zusammenhang der Vegetation mit dem Klima und der Meereshöhe, im

[6] [PL12, 136] und [Dem11, 11]
[7] [Dem11, 11]
[8] [PL12, 137]
[9] [Dem11, 12]
[10] [PL12, 138]
[11] [Dem11, 12, 19]
[12] [PL12, 139]
[13] [DZ12, 115]
[14] [PL12, 139]
[15] [Dem11, 13]
[16] [PL12, 140]
[17] [PL12, 140] und [Dem11, 13]
[18] [Dem11, 13]
[19] [PL12, 142]
[20] [Dem11, 13] und [PL12, 142]
[21] [PL12, 142f]
[22] [Dem11, 16]

Zusammenhang mit dem Aussehen der Pflanzen.[23]

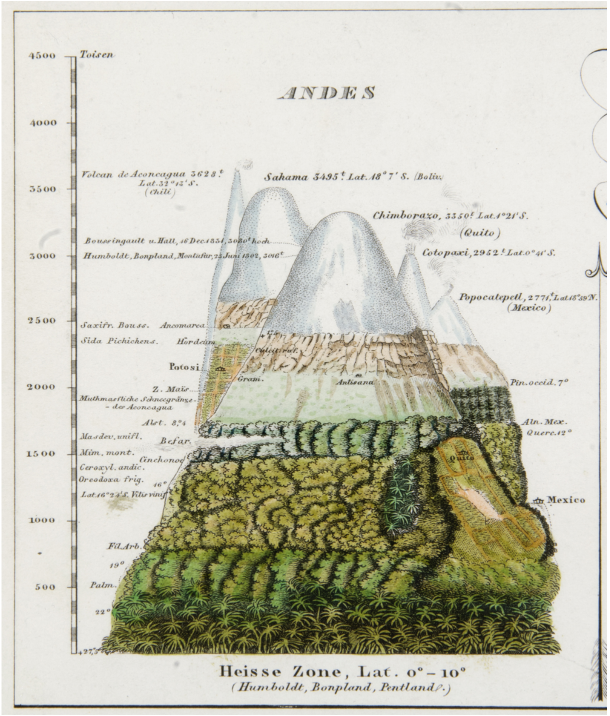


Abbildung 1: Vegetationsmodell der Anden mit sichtbaren Höhenstufen von Alexander von Humboldt.

Nach der Anden-Expedition reisen sie zurück nach Mexico. Während der Schifffahrt misst Humboldt die Wassertemperatur und Geschwindigkeit der Meeresströmungen, wodurch die heute als „Humboldt-Strom“ bekannte Meeresströmung kartografiert werden konnte. In Mexiko angekommen, erforscht Humboldt die dortigen Vulkane. Einen großen Teil seiner dortigen Forschung befasst sich mit den dort ansässigen Indianern und der Geschichte der Azteken.[24]

Bezeichnend für die Ergebnisse und Funde der Reise ist große empirische Genauigkeit und Sorgfalt auf Seiten von Humboldt. Dazu zählen Skizzen der Umgebung, Notierung von Messdaten und Beobachtungen, sowie deren Aufarbeitung und Auswertung, die später erfolgte.[25]

Im August 1804 kommen Alexander von Humboldt und Aimé Bonpland wieder in Frankreich an. In Paris wertet er die Ergebnisse seiner Amerikareise aus, und veröffentlicht diese in über 30 Bänden.[26] Daneben veröffentlicht er seine Reiseergebnisse auch thematisch gegliedert. Er hält Vorträge über seine Ergebnisse und Vermutungen, und freundet sich mit anderen Naturwissenschaftlern an.[27] Für die Veröffentlichung seiner Ergebnisse

[23] [DZ12, 117]
[24] [PL12, 143f]
[25] [DZ12, 117]
[26] [Dem11, 17ff], [PL12, 145]
[27] [PL12, 145]

und des Reiseberichts hatte Humboldt sein gesamtes Vermögen aufgebraucht.[28] Im Jahr 1828 zieht er wieder nach Berlin und hält Vorträge an der Berliner Universität.[29]

1.4 Die Reise nach Asien

Schon 1811, in Paris, will Humboldt eine Expedition Richtung Osten nach Südasien unternehmen. Diese scheitert jedoch an politischen und finanziellen Gründen.[30]

Doch 1829 kann der 60-jährige Humboldt auf Einladung und Kosten des russischen Zaren den Ural sowie Altai in Zentralasien bereisen und erforschen.[31] Humboldt erforscht die Mineralien und den damals erfolgreichen Bergbau Russlands, Vulkane und den Erdmagnetismus. Aufgrund seiner landschaftlichen Beobachtungen und der Gesteinsanalysen findet Humboldt Diamantvorkommen im Ural.[32]

Nach 1830, wieder in Berlin, widmet sich Alexander von Humboldt vor allem der wissenschaftlichen Aufarbeitung seiner Forschung. Er hält Vorträge zum Vulkanismus, Gebirgsarten, Temperaturzonen, Pflanzenformen sowie Winde und Luftdruck nicht nur an der Berliner Universität, sondern auch für ein breites öffentliches Publikum. [33]

Basierend auf seinen Vorträgen will er ein Buch erstellen, in dem alles Wissen über „die ganze materielle Welt, alles, was wir heute von den Erscheinungen der Himmelsräume und des Erdenlebens [...] wissen“ (Alexander von Humboldt zit. n. [Dem11, 20]) aufgeführt ist. Seine eigenen Ergebnisse will er mit aktuellen Forschungen ergänzen und aktuell halten. Das Werk mit dem Titel „Kosmos. Entwurf einer physischen Weltbeschreibung“ wird in mehreren Bänden veröffentlicht und ist mit Humboldts Tod 1859 immer noch nicht fertig gestellt.[34]

1.5 Humboldts Werk und Wirken

In diesem Abschnitt befinden sich einige Punkte, welche Alexander von Humboldts Wirken und Einfluss bis in die heutige Zeit darstellen. Einiges ergibt sich schon aus dem vorigen Abschnitt, in diesem Abschnitt will ich einige wenige Punkte hervorheben.

Empirisches Vorgehen und Einfluss auf die Wissenschaft
Dürr und Zepp führen aus: „Alexander von Humboldt gilt als Begründer moderner wissenschaftlicher Disziplinen, die auf empirischer Grundlage Gesetzmäßigkeiten über unmittelbar oder mittelbar sinnlich erfahrbare Wirklichkeit formulieren (sog. Naturgesetze).“ (vgl. [DZ12, 116]) Dazu gehört das Messen von Naturerscheinungen,[35] welches Humboldt während seiner Reisen gewissenhaft betrieb. Er ging mit großer Sorgfalt mit seinen empirischen Daten und Befunden um.[36]

[28] [Dem11, 19]
[29] [Dem11, 19] und [PL12, 146]
[30] [Dem11, 19] und [PL12, 146]
[31] [Dem11, 19] und [PL12, 146]
[32] [PL12, 146f]
[33] [PL12, 147f]
[34] [PL12, 147ff] und [Dem11, 20]
[35] [DZ12, 116]
[36] [DZ12, 117]

Alexander von Humboldt beeinflusste eine ganze Reihe moderner wissenschaftlicher Disziplinen. Er legte u.a. Grundlagen für die heutige Klimatologie (mit der Vermutung eines globalen Wind-Systems), die Geophysik, Geologie und den Erdmagnetismus. Er klassifizierte unzählige (bis dahin teilweise unbekannte) Pflanzen. Seine Arbeitsmethoden werden bis heute in der Wissenschaft verwendet, beispielsweise die Verwendung von Linien mit gleicher Temperatur (Isotherme) auf Karten.[37]

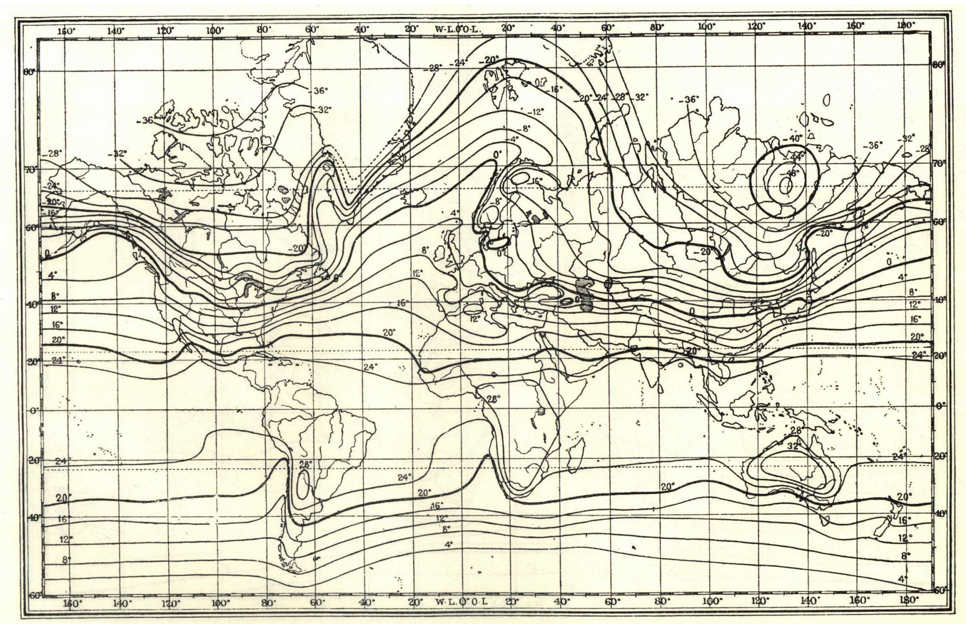


Abbildung 2: Abbildung der Isotherme im Januar.

Pflanzengeographie

Wie im vorigen Abschnitt schon erwähnt, gilt Alexander von Humboldt als Begründer der Pflanzengeographie.

Veröffentlichungen

Alexander von Humboldt hat in seinem Leben über 600 Veröffentlichungen herausgebracht.[38] Darunter das große, mehrbändige Werk über seine Amerikareise und der „Kosmos“, welcher als Universalwerk angelegt und geplant war.[39]

Der Kern von Humboldts Werk und Wirken scheint mir zu sein, dass er den großen Zusammenhang sieht und sucht. Dabei vergisst er jedoch nicht die Details, welche er gewissenhaft erforscht und dann in einen größeren Rahmen setzt. Dies beschränkt sich nicht nur auf einen spezifischen Wissenschaftszweig, sondern umfasst die gesamte Breite der Naturwissenschaften, welche er vernetzt und verbindet.

[37] [PL12, 150]
[38] [Dem11, 20]
[39] [DZ12, 114]

2 Carl Friedrich Gauß

2.1 Bezug zum Film

In diesem Abschnitt finden sich Begebenheiten über Carl Friedrich Gauß, die ich in dem Film „Die Vermessung der Welt“ gefunden habe.

Carl Friedrich Gauß stammt aus einfachen Verhältnissen und geht 1785 im Herzogtum Braunschweig zur Schule. Dort fällt er dem Lehrer, Herrn Büttner, durch die schnelle Berechnung der Summe der Zahlen von 1 bis 100 auf. Büttner fördert Gauß und setzt sich für diesen ein, worauf Gauß ein Stipendium vom Herzog von Braunschweig erhält und an der Universität studiert.

Gauß löst während seiner Studienzeit ein altes Problem, welches das 17-Eck betrifft. Er kennt sich mit Zufallsverteilungen aus und führt Landvermessungen (mittels Triangulation) durch. Beim Messen mittels Dreiecken treten jedoch Fehler auf, da „die Landschaft doch keine Fläche sei“, im Gegensatz zu Dreiecken. Um diese Fehler zu minimieren, wendet Gauß Differentialoperationen an, was zuvor noch niemand gemacht hat.

Sein erstes Buch („Gundlegung der Zahlentheorie“) handelt von Zahlenräumen, inklusive der imaginären Zahlen, in Zusammenhang mit Polynomen. Weiter findet er eine approximative Korrektur der Messfehler der Planetenbahnen. In der Zeit von Napoleon wird Carl Friedrich Gauß zum Professor berufen.

Im höheren Alter wird er als „Fürst der Mathematiker“ betitelt. Er beschäftigt sich mit Sterbestatistiken, und lehnt eine Professur an einer anderen Universität entschieden ab. Im Jahr 1828 besucht er auf Einladung Alexander von Humboldts den deutschen Naturforschercongress in Berlin, wo sich die beiden näher kennen lernen. Gauß bietet an, Humboldt bei der Auswertung von Messergebnissen seiner künftigen Reise zu helfen.

2.2 Biographischer Hintergrund

Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren. Er wuchs in bescheidenen familiären Verhältnissen auf,[40] brachte sich jedoch selbst lesen, schreiben und rechnen bei.[41] Mit 7 Jahren kam Gauß an die Schule, wo er von J. G. Büttner unterrichtet wurde.[42] Die ersten beiden Jahre fiel Gauß nicht sonderlich auf, sondern erst, als er im dritten Schuljahr in die Rechenklasse kam.[43] Der Lehrer, Büttner, erkannte bald das mathematische Talent von Gauß, und beschaffte diesem Bücher über Mathematik. Darüber hinaus fanden Büttner und dessen Gehilfe, Martin Barrels, welcher ebenfalls mathematisch interessiert war, finanzielle Förderer für Gauß. Dadurch konnte dieser 1788 das Gymnasium in Braunschweig besuchen.[44]

Wegen seiner schulischen Leistungen wurde Gauß gleich in die 2. Klasse aufgenommen.[45]

[40] [Wus74, 8]
[41] [Bü87, 6]
[42] [Wus74, 10]
[43] [Rei77, 7]
[44] [Wus74, 11f]
[45] [Rei77, 11]

Aufgrund außerordentlicher Leistungen wurde Gauß 1791 dem Herzog von Braunschweig vorgestellt.[46] Mit dessen finanzieller Unterstützung konnte sich Gauß von 1792 bis 1795 am Collegium Carolinum immatrikulieren. Auch für das spätere Universitätsstudium in Göttingen kam der Herzog finanziell auf.[47] Am Collegium Carolinum eignete sich Gauß Latein und Griechisch sowie weiteres grundlegendes Wissen über Mathematik an.[48]

1795, mit 18 Jahren, geht Gauß nach Göttingen, um Mathematik zu studieren.[49] Dort beschäftigte er sich tiefgehender mit der Mathematik, aber auch mit Philosophie und Literatur. Im Jahr 1796 findet Gauß die Lösung für das 2000 Jahre alte Problem der Konstruierbarkeit des 17-Ecks mit Lineal und Zirkel. Zu der Zeit war schon bekannt, dass man das regelmäßige 3-, 4- und 5-Eck sowie alle n-Ecke, bei denen n ein Vielfaches von 3, 4 oder 5 ist, mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.[50] Gauß gelang der Nachweis, dass man auch das regelmäßige 17-Eck (und noch weitere n-Ecke, die bestimmten Regeln folgen) mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Dies war seine erste Veröffentlichung.[51]

1798 kehrt Gauß nach Braunschweig zurück.[52]

2.3 Forschung und Ergebnisse

Im Folgenden sind einige Hauptthemen, die Gauß während seines Lebens bearbeitet hat, herausgegriffen und vorgestellt. Mehrere mathematische Entdeckungen, die Gauß nicht publizierte, wurden erst nach seinem Tod in seinem Tagebuch wiederentdeckt.[53]

2.3.1 Die Methode der kleinsten Quadrate

Gauß benutzte die „Methode der kleinsten Quadrate“ bei mehreren seiner Berechnungen, unter anderem in der Astronomie.[54] Entwickelt hatte er die Methode schon 1794,[55] grundlegende Überlegungen und Hintergründe publiziert er aber erst in den 1820er Jahren. Dadurch bekam die Methode öffentlich Bedeutung.[56]

Problemstellung: Gegeben ist eine Mengen von (Daten-) Punkten. Diese Punkte befinden sich auf der zweidimensionalen Ebene, sind also von 2 Koordinaten abhängig.[57] Gesucht ist eine Funktion (eine Gerade oder Kurve), welche die Punktewolke möglichst genau beschreibt, also einen möglichst kleinen Abstand von allen Punkten hat.[58]

[46] [Bü87, 6]
[47] [Wus74, 13, 16]
[48] [Bü87, 8f]
[49] [Bü87, 14]
[50] [Rei77, 11f]
[51] [Wus74, 19f]
[52] [Bü87, 16]
[53] [Wus74, 17]
[54] [Bü87, 134f]
[55] [Wus74, 15]
[56] [Bü87, 134f]
[57] [SSA+07, 203]
[58] [Ste14]

Anwendungsbereich: Wahrscheinlichkeitsrechnung[59] und Optimierung für Messdaten.[60]

Vorgehensweise (Grundidee): Die Summe der quadratischen (vertikalen) Abstände von den Punkten zur Funktion wird minimiert. Als Formel aufgeschrieben wird gesucht: $\min \sum_{i=1}^{n} (y_m - y_i)^2$, wobei n die Anzahl der Punkte ist und y_m die y-Koordinate der gesuchten Kurve an der Stelle x.

Die gesuchte Funktion lässt sich in 2 Schritten ermitteln:[61] Zuerst wird die Summe partiell differenziert, d.h. ich leite nach einem Parameter ab. Eine Gerade beispielsweise hat die Form $ax + b$. Das heißt, ich suche die Parameter a und b, und leite meine Summe einmal nach a und einmal nach b ab.

Durch die Differentiation habe ich ein Gleichungssystem erhalten. Mit dem Lösen des Gleichungssystems sind alle Parameter bestimmt, und ich kann die gesuchte Funktion angeben.

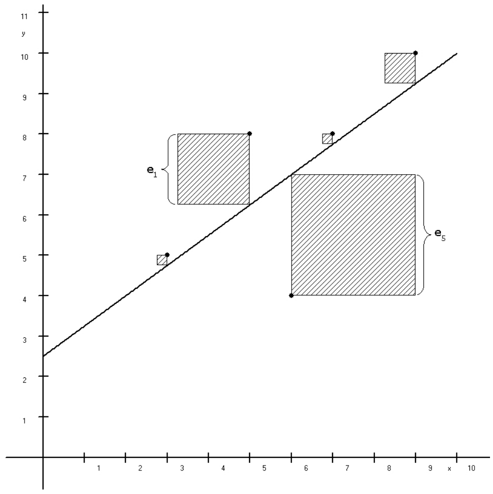


Abbildung 3: Anzeige mehrerer Punkte in einem Koordinatensystem. Die Summe der quadratische Abstände (dargestellt durch die schraffierten Quadrate) zwischen den Punkten und der Gerade soll minimal sein.

Ein konkretes Beispiel: Gegeben sind die Punkte (2,1), (3,3) und (5,4). Gesucht ist eine Gerade $ax + b$, welche die Punkte möglichst genau beschreibt.

Der quadratische Abstand von einem der Punkte zur Gerade ist $(ax + b - y_i)^2$, wobei y_i die Koordinate eines Punktes ist. Daraus ergibt sich:

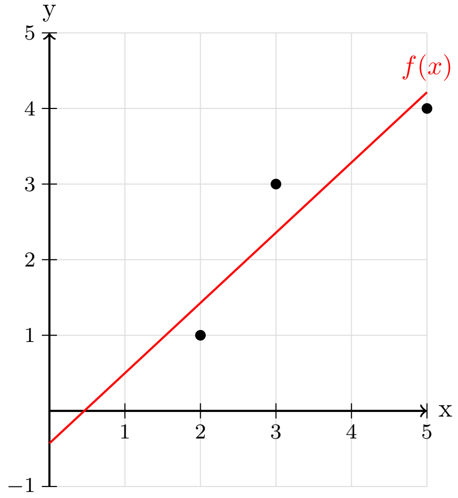
$$\begin{aligned} F(a, b) &= (2a + b - 1)^2 + (3a + b - 3)^2 + (5a + b - 4)^2 \\ &= 38a^2 - 62a + 20ab - 16b + 3b^2 + 26 \end{aligned}$$

Nun werden die partiellen Ableitungen gebildet:
Ableitung nach a: $76a + 20b - 62$
Ableitung nach b: $20a + 6b - 16$

[59] [Bü87, 134]
[60] [Ste14]
[61] [Ste14]

Durch Auflösen des Gleichungssystems ergibt sich: $a = \frac{13}{14}$ und $b = -\frac{3}{7}$
Die gesuchte Gerade hat folgende Form: $f(x) = \frac{13}{14}x - \frac{3}{7}$

Im Koordinatensystem dargestellt:



2.3.2 Zahlentheorie

Das Werk „Disquisitiones Arithmeticae" ist die erste wichtige Publikation von Gauß und erscheint bald nach seiner Dissertation.[62]

Das Buch gliedert sich in 3 Hauptteile: Theorie der Kongruenzen, quadratische Formen und Theorie der Kreisteilung, welche jeweils Beweise zu den Themen enthalten.[63]

Die Theorie der Kongruenzen beschäftigt sich mit der modulo-Rechnung (dem Rest einer Division), damit verbunden den Restklassen, und Primzahlen sowie deren Zerlegung.[64] Gauß führte die bis heute gültige Notation für Kongruenzen ein: $a \equiv b(mod.m)$[65]

Bei ***Quadratische Formen*** wird die Frage untersucht, welche Zahlen A sich in der Form $ax^2 + bxy + cy^2$ darstellen lassen.[66] Insbesondere, welche Zahlen sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen.

Bei der ***Theorie der Kreisteilung*** beschäftigt sich Gauß mit der Frage, welche n-Ecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Er führte das Problem auf die Zahlentheorie zurück und löst es mit den dort vorhandenen Mitteln.[67]

Wirkung
Mit der Veröffentlichung der *Disquisitiones Arithmeticae* wurde Gauß zu einem der führen-

[62] [Bü87, 19f]
[63] [Wus74, 32f]
[64] [Bü87, 20]
[65] [Wus74, 33]
[66] [Rei77, 55]
[67] [Wus74, 34]

den Mathematiker seiner Zeit.[68] Sie hatte großen Einfluss auf die heutige Zahlentheorie.[69]

2.3.3 Astronomie

1801 wurde in Italien ein Himmelskörper, Ceres genannt, entdeckt. Aufgrund schlechter Lichtverhältnisse (er trat hinter die Sonne) ging dieser jedoch verloren und konnte nicht mehr wiedergefunden werden. Daraufhin entwickelte Gauß eine Methode, um Ceres mit den wenigen vorhandenen Messdaten wiederfinden zu können:[70] Er kombinierte die Methode der kleinsten Quadrate mit einer Ellipsenbahn.[71] Sein Ergebnis wich von anderen Interpolationen erheblich ab, und als Ceres an der von Gauß ermittelten Position widergefunden wurde, wurde er in ganz Europa bekannt.[72]

Er beschäftigte sich ebenfalls mit der „Störungstheorie“: dem Einfluss der Planeten auf die Bahn eines anderen Planeten. 1809 veröffentlichte er seine Theorie zu diesem Thema[73] sowie zur Berechnung der Planetenbahnen mit nur wenigen Messdaten.[74] Gauß beschäftigte sich auch praktisch mit der Astronomie: er beobachtete Planeten und notierte deren Koordinaten.[75] Weiter suchte er nach Wegen, die damaligen optischen Instrumente zu verbessern.[76]

2.3.4 Landvermessungen und Geodäsie

Zwischen 1821 und 1825 leitete Gauß die Vermessung von Hannover.[77] Dazu wurde die Methode der Triangulation benutzt:[78] eine Fläche wird durch ein Netz von Dreiecke aufgeteilt. Durch die Messung einer Strecke und zweier Winkel eines Dreiecks lassen sich die restlichen Seiten des Dreiecks errechnen.[79]

Während seiner Messungen erfand Gauß den Heliotropen. Mit diesem konnte man, neben dem eigentlichen Messen, per Licht Nachrichten über weite Strecken zwischen den Beobachtern schicken.[80] Dadurch waren die Vermessungstrups unabhängiger von Klima und Wetter. [81]

Nach 1825 wertete er seine Messergebnisse aus. Mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate konnte Gauß Unstimmigkeiten in seiner Messung ausgleichen und erhielt so hochqualitative Resultate. [82]

Mit seinen Ergebnissen setzte Gauß neue Maßstäbe für die Genauigkeit der Beobachtungen, aber auch in der theoretischen Behandlung von geodätischen Problemen.[83]

---

[68] [Wus74, 32]
[69] [Bü87, 36]
[70] [Wus74, 37]
[71] [Rei77, 69f]
[72] [Bü87, 44]
[73] [Wus74, 39f]
[74] [Bü87, 80]
[75] [Rei77, 71]
[76] [Bü87, 45]
[77] [Wus74, 66]
[78] [Rei77, 79]
[79] [Fen14]
[80] [Rei77, 78]
[81] [Wus74, 69f]
[82] [Rei77, 77]
[83] [Bü87, 107]

Die Geodäsie beschäftigt sich mit der Frage, wie man die dreidimensionale Erdoberfläche auf einer zweidimensionalen Karte darstellen (also projizieren) kann. Gauß näherte sich dieser Fragestellung mithilfe der Differential- und Integralrechnung und gelangte zu seiner Theorie der konformen Abbildungen.

Er begründete mit seiner Arbeit die Differentialgeometrie als eigenständiges mathematisches Gebiet.[84]

2.3.5 Magnetismus und Elektrizität

Alexander von Humboldt, den Gauß 1828 auf der Versammlung deutscher und skandinavischer Naturforscher kennen lernte, begeisterte ihn für den Erdmagnetismus. In einer seiner Arbeiten prägt Gauß den Begriff des Magnetpols.[85] Er prägt das noch heute gebräuchliche absolute physikalische Maßsystem, indem er Polstärke, Feldstärke usw. auf die Grundgrößen Länge, Zeit und Masse zurückführt. Mit einer seiner Abhandlungen begründet er die mathematisch-physikalische Disziplin der Potentialtheorie.[86] Auf theoretischer Basis bestimmt er die Position der Magnetpole auf der Erde, welche durch Expeditionen bestätigt werden, und trägt noch weitere Ergebnisse und Überlegungen zum Magnetismus bei.

Zusammen mit Wilhelm Weber stellte Gauß physikalische Untersuchungen an, vor allem auf dem Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus.[87] Sie erfinden die elektromagnetische Telegraphie: Eine Möglichkeit, Stromstöße in zwei Richtungen zu schicken und diese am jeweiligen Ende sichtbar zu machen. Über eine Strecke von 2km verlegt Weber Leitungen und konnte so per Telegraph mit Gauß kommunizieren. Dieses Experiment trug wesentlich zur Verbreitung der Telegraphen bei.[88]

2.3.6 Komplexe Zahlen

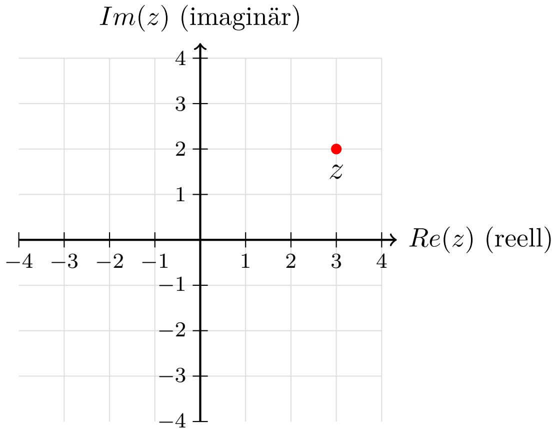
Die komplexen Zahlen waren in der Zeit von Gauß schon bekannt, jedoch gab es dazu noch keine einheitliche (bzw. keine wirklich vorhandene) Theorie.[89] So verwendet er diese in seinen früheren Beweisen auch nicht.[90]

Die ***Frage hinter den komplexen Zahlen*** ist: Welche Lösung hat eine negative Wurzel (Beispielsweise $\sqrt{-25}$)? 1831 legt Gauß seine „Theorie der biquadratischen Reste“ vor und prägt den Begriff der komplexen Zahl. Er definiert diese als $a + bi$, wobei $i = \sqrt{-1}$ und $-\infty < a, b < +\infty$.

Er legt dar, dass die reellen Zahlen in den komplexen Zahlen enthalten sind. Er beschreibt die Darstellung der komplexen Zahlen in einer Ebene (und nicht auf dem Zahlenstrahl), welche heute „Gaußsche Zahlenebene“ genannt wird, und ein System von Punkten ist.[91]

---

[84] [Wus74, 62f]
[85] [Rei77, 84]
[86] [Wus74, 76]
[87] [Rei77, 81ff]
[88] [Wus74, 77ff]
[89] [Rei77, 57ff]
[90] [Wus74, 23]
[91] [Rei77, 58ff]



Beispiel eines Punktes in der Gaußschen Zahlenebene: $z = 3 + 2i = 3 + 2\sqrt{-1}$

2.4 Das Werk und Wirken von Gauß

Wie aus dem vorigen Abschnitt hervorgeht, hat Gauß zu seinen Lebzeiten großen Einfluss auf verschiedenste Bereiche der Mathematik, und teilweise der Naturwissenschaften, genommen. Seine Ergebnisse und Anstöße haben bis heute große Bedeutung und Tragweite.

Das Wesen von Gauß Arbeit und Wirken scheint mir zu sein, dass dieser verschiedenste Disziplinen der Mathematik verbindet. Er führt Probleme verschiedener Gebiete (auch in der Naturwissenschaft) auf unterschiedliche mathematische Gebiete über, und findet so Lösungen. Dabei verbindet er immer wieder Theorie und Praxis.

Ein weiteres Merkmal ist, dass Gauß sich sehr weitgehend und tief mit den jeweiligen Thematiken beschäftigt. Er bezieht vorangegangene Überlegungen und Beweise mit ein, und macht sich seine eigenen Gedanken. Diese stellt er in seinen Abhandlungen sehr gewissenhaft und vollständig dar, führt Beweise und übt gegebenenfalls auch Kritik an vorhergegangenen Ausführungen und grundlegenden Theorien.

3 Gauß und Humboldt im Vergleich

Im folgenden sind einige Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Gauß und Humboldt ausgearbeitet. Diese ergeben sich aus obigen Informationen und den Quellen, die zur Recherche verwendet wurden.

3.1 Gemeinsamkeiten

Breite
Sowohl Gauß als auch Humboldt haben in ihrem jeweiligen Gebiet eine breite Palette an Thematiken behandelt. Humboldt beschäftigte sich vor allem mit naturwissenschaftlichen Themen, u.a. Botanik, Geologie, Vulkanismus, Messungen, Astronomie und dem Erforschen fremder Völker. Gauß beschäftigte sich mit verschiedensten Themen der Mathematik, darunter Zahlentheorie, Analysis und Geometrie.

Beide verstanden es, das Wissen aus verschiedenen Gebieten zu verbinden.

Tiefe und Genauigkeit
Gauß und Humboldt hatten nicht nur einen Überblick über ihr jeweiliges (Fach-)Gebiet, sondern sind auch sehr in die Tiefe gegangen.

So beschäftigte sich Gauß eingehend mit verschiedenen mathematischen Theorien und Begebenheiten. Er fand Beweise für alte (und neuere) Probleme und legte eine ganze Reihe eigener Theorien dar.

Humboldt nahm alles, was er beobachtete und messen konnte, sehr wichtig. Er zog Schlüsse aus seinen Beobachtungen, bezog alte und neue Theorien und Überlegungen mit ein, und führte diese in einem größeren Kontext zusammen.

Bezeichnend für beide ist eine große Genauigkeit im Umgang mit Daten, bei der Auswertung derselben und beim Schließen auf Gesetzmäßigkeiten.

Netzwerke
Aus den von mir verwendeten Quellen geht hervor, dass sowohl Gauß als auch Humboldt ein europaweites Netzwerk hatten. Sie standen in Verbindung mit Freunden, Fachexperten und führenden Wissenschaftlern ihrer Zeit.

Tragweite der Ergebnisse
Gauß und Humboldt hatten in ihrer Zeit deutlichen Einfluss auf Entwicklungen und die Art, wie die Welt gesehen wurde. Viele ihrer Ergebnisse und Anregungen haben bis heute Tragweite und Einfluss. Bei Gauß ist dieser Einfluss vor allem in der Mathematik zu sehen (für Beispiele, siehe den Abschnitt über Gauß). Humboldt hatte Einfluss auf die Vorgehensweisen und Disziplinen in der heutigen Naturwissenschaft.

Fachgebiete (Überschneidungen)
Obwohl Gauß und Humboldt grundlegend verschiedene Fachgebiete hatten, gab es doch Überschneidungen. Sowohl Gauß als auch Humboldt beschäftigten sich mit Landvermessungen, Geodäsie und dem Erdmagnetfeld sowie der Physik (darin vor allem mit der Elektrizität).

3.2 Unterschiede

Fachgebiete
Die grundlegenden Fachgebiete von Gauß und Humboldt waren unterschiedlich. Gauß beschäftigte sich vorrangig mit mathematischen Themen. Humboldt hingegen war vorrangig Naturwissenschaftler.

Grundlegende Methodik
Die Methoden und Herangehensweisen von Gauß und Humboldt sind nicht immer, aber grundlegend, verschieden.

Humboldt erlangte vorrangig durch Messungen, Beobachten, Sammeln (also empirisch) und durch die Aufbereitung und Analyse seiner Daten zu seinen Ergebnissen.

Gauß hingegen kam vorrangig durch Nachdenken und Logik zu seinen Ergebnissen. Er stellt seine Überlegungen dar, und beweist diese mit Mitteln der Mathematik und Logik.

Räumlicher Wirkungskreis
Humboldt reiste weit in der Welt herum. Er forschte in Amerika und Asien und lebte viele Jahre in Paris und in Deutschland. Gauß hingegen reiste nicht weit, sein Wohnort blieb immer in derselben Region. Seine Universität wechselte er ebenfalls nur wenige Male.

4 Ein mathematischer Beweis - die Gaußsche Summenformel

4.1 Das Induktionsprinzip

Bei der Induktion soll gezeigt werden, dass eine Aussage für alle natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gilt. Das kann nicht dadurch gezeigt werden, dass man die Korrektheit durch Einsetzen bestimmter Zahlen zeigt. Denn dann würde die Aussage nur für diese Zahlen gelten. Und was wäre dann, wenn ich einfach eine größere Zahl nehme? Die Aussage müsste speziell für diese Zahl wieder gezeigt werden. Um eine Aussage nicht für jede Zahl neu zeigen zu müssen, sondern allgemein beweisen zu können, gibt es die sogenannte *(vollständige) Induktion.*

Die Idee hinter der Induktion ist die folgende:

Ich habe ein Grundobjekt. Dieses Grundobjekt ist mein „Startobjekt“, also mein erstes bzw. kleinstes Element, von dem ich zeigen will, dass die Aussage gilt. Bei den natürlichen Zahlen ist das Grundobjekt meistens 0 oder 1. Für dieses Grundobjekt zeigt man jetzt, dass die Aussage gilt. Dieser Schritt wird *Induktionsbasis* genannt.

Nachdem ich weiß, dass meine Aussage für mein Startobjekt gilt, kann ich mir alle weiteren Elemente anschauen. Anstatt mir jedes einzeln anzuschauen (was weder gewollt noch möglich ist), schaue ich mir ein beliebiges Element und den Nachfolger davon an. Dieser Schritt wird *Induktionsschritt* genannt.

Ich behaupte, dass die Aussage für dieses beliebige Element (bezeichnet mit n) schon gilt, und zeige, dass sie dann auch für den Nachfolger $(n + 1)$ gilt. Um das zu zeigen, verwende ich, dass die Aussage für n schon gilt.

Insbesondere bedeutet das: Meine Aussage gilt für den Nachfolger meines Grundobjekts (für das die Aussage schon gezeigt ist), und dann wiederum für dessen Nachfolger, usw. Also für alle Elemente, für die ich meine Aussage beweisen will, denn jedes dieser Elemente ist (über mehrere Schritte) Nachfolger meines Grundobjekts.

Veranschaulichen lässt sich das Induktionsprinzip mit (unendlich vielen) Dominosteinen:

Sobald ich den Anfangsstein umgeworfen habe (Induktion: die Aussage gilt für das Grundobjekt, den Anfangsstein), werden alle anderen Dominosteine von ihrem jeweiligen Vorgänger umgeworfen (Induktion: die Aussage gilt für ein Element, es wird gezeigt, dass sie auch für den jeweiligen Nachfolger gilt). Dadurch werden alle Dominosteine umgeworfen (Induktion: die Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen ab meiner Startzahl).

4.2 Beweis der Gaußschen Summenformel

Über Carl Friedrich Gauß gibt es die folgende Anekdote:

In der Schule wurde den Schülern die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100 zu summieren. Gauß hatte binnen kurzer Zeit das korrekte Ergebnis. Ihm war aufgefallen, dass die Zahlen von links und rechts addiert jeweils 101 ergeben ($100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101$ usw.). Dies ergab insgesamt 50 solcher Paare, das Ergebnis war also 5050.[92]

Verallgemeinert ergibt sich folgende Gleichung, die „Gaußsche Summenformel“:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Nun zum Beweis der Gaußschen Summenformel per (vollständiger) Induktion:

Induktionsbasis:
Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$$

Induktionschritt:
Für n sei bereits gezeigt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Nun zeige ich, dass die Gleichung auch für den Nachfolger von n, $n + 1$, gilt.

Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\
&= \frac{(n^2 + n) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} i
\end{aligned}$$

(Zur Notation: I.V. *zeigt an, dass hier die sog. „Induktionsvoraussetzung“ verwendet wird. Die Induktionsvoraussetzung besagt, dass die Aussage für n schon gilt. An dieser*

[92] [Wus74, 10f]

Stelle wird der Bruch durch die gleichbedeutende Summe ersetzt.)

Somit ist gezeigt, dass die Gaußsche Summenformel für alle natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gilt.

5 Abschließende Bemerkungen

Gauß und die Geometrie
Lange Zeit war die Grundlage für die Geometrie die so genannte „Euklidische Geometrie“, so auch zu Lebzeiten von Gauß. Die euklidische Geometrie baut auf 5 Axiomen auf, wobei lange Zeit (erfolglos) versucht wurde, das 5. Axiom (Stichwort: Parallelenaxiom) aus den 4 anderen herzuleiten. Gauß bewies, dass das 5. Axiom eigenständig und von den anderen vieren unabhängig ist.

Bei seinen Zeitgenossen stieß er damit auf heftige Kritik, infolge dessen er nicht mehr über die Grundlagen der Geometrie publizierte und sich nur selten öffentlich äußerte.

Trotzdem beschäftigte sich Gauß mit der nicht-euklidischen Geometrie, bei der das 5. Axiom durch andere Axiome ersetzt werden kann. Erhalten sind vor allem Briefe und Einträge in sein Tagebuch.[93]

Film und Wirklichkeit
Mein Eindruck ist, dass der Film „Die Vermessung der Welt“ die wahren Begebenheiten oft oberflächlich und teils nicht ganz korrekt zeigt. Insgesamt orientiert er sich am Leben von Gauß und Humboldt.

Bei näherer Betrachtung ist mir allerdings aufgefallen, dass Humboldts Forschung und Reisen intuitiver und verständlicher dargestellt werden als das Leben von Gauß. Dies betrifft vor allem seine Ergebnisse: Die von Gauß behandelten Thematiken werden alle irgendwie erwähnt, jedoch nicht chronologisch korrekt und überwiegend nur oberflächlich. Was ebenfalls fehlt, ist eine Darstellung der Auswirkungen auf die Mathematik.

Humboldts Forschungen und Reisen werden weit verständlicher präsentiert. Jedoch fehlen auch hier einige Themengebiete, mit denen er sich beschäftigte, und die Auswirkungen auf die Naturwissenschaften.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, warum Humboldt (als Naturwissenschaftler) ausführlicher und verständlicher dargestellt wird als Gauß (der Mathematiker).

[93] [Wus74, 53ff] und [Bü87, 96ff]

Abbildungsverzeichnis

Literatur

[Bü87] Bühler, Walter K.: Gauss. Eine bibliographische Studie. Berlin Heidelberg : Springer, 1987

[Dem11] Demhardt, Imre J.: Aufbruch ins Unbekannte. Legendäre Forschungsreisen von Humboldt bis Hedin. Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 2011

[DZ12] Dürr, Heiner ; Zepp, Harald: Geographie verstehen. Ein Lotsen- und Arbeitsbuch. Paderborn : Ferdinand Schönongh, 2012

[Fen14] Fene, Gregor D.: Triangulation - Die Flurvermessung mit Dreiecken. 2014. – Verfügbar unter: <http://planet–wissen.de/natur_technik/ordnungssysteme/-vermessung_der_erde/triangulation.jsp [zuletzt abgerufen am 10.11.2014]

[PL12] Podbregar, Nadja ; Lohmann, Dieter: Im Fokus: Entdecker. Die Erkundung der Welt. Springer Specktrum, 2012

[Rei77] Reich, Karin: Carl Friedrich Gauß. 2. Auflage. München : Moos & Partner, 1977

[SSA+07] Schalk, Heinz-Christian ; Steiner, Gerald F. ; Aubauer, Hans P. ; Bolhar-Nordenkampf, Andreas ; Dorninger, Christian ; Gurtner-Würl, Manfred ; Nöbauer, Siegfried ; Plihal, Andreas ; Spitzer, Gerhard: Mathematik 3. 3. Auflage. Wien : Hölder Pichler Tempsky, 2007

[Ste14] Steinfeld, Thomas: Mathepedia. Methode der kleinsten Quadrate. 2014. – Verfügbar unter: <http://www.mathepedia.de/Methode_der_kleinsten_-Quadrate.aspx>[zuletzt abgerufen am 09.11.2014]

[Wus74] Wussing, Hans: Biographien hervorragender Wissenschaftler, Techniker und Mediziner. Bd. 15, Carl Friedrich Gauß. 3. Auflage. Leipzig : Teubner, 1974